

## 新たな定義による、ガウス整数における $\Phi$ 関数 Phi Function by New Definition in Gaussian Integer

伊藤 晃大<sup>1</sup>, 後藤 理<sup>1</sup>, 小林 篤武<sup>1</sup>, 大山 穂高<sup>1</sup>, 山谷 泰生<sup>1</sup>, 佐藤 真弓<sup>1</sup>, 松橋 弘光<sup>1</sup>  
ITO Kota, GOTO Michi, KOBAYASHI Atsumu, OYAMA Hotaka, YAMAYA Taiki,  
SATO Mayumi, MATSUHASHI Hiromitsu

秋田県立秋田高等学校<sup>1</sup>

Akita Senior High School<sup>1</sup>

(Received: 28 August 2025; Accepted: 5 November 2025; Released: 14 November 2025)

### [要約]

互いに素な数の個数を返す $\Phi$ 関数の性質に興味を持ち、ガウス整数において同じように「P関数」と名付けた新しい関数を定義した。また、この関数を研究し、性質を調べることを目的とした。先行研究や一般的な $\Phi$ 関数の拡張においてガウス整数の $\Phi$ 関数は互いに素なものの個数を表す関数ではないようであったため、自然数の $\Phi$ 関数に準拠して、互いに素なものの個数を返す関数を新しく定義した。そこで絶対値が0より大きく引数の絶対値以下の個数をかえす関数をC関数として、C関数とP関数について成り立つ公式を導出した。さらにP関数とC関数に関する3つの定理を証明した。導出した定理の中には正の整数での $\Phi$ 関数において成り立つものと類似しているものが存在した。 $\Phi$ 関数と同様の性質がP関数にも存在し、P関数の性質をより高次元に一般化できるだろうと考えられ、今後、ガウス整数と自然数の約数や素因数分解などの相違点を考察し、P関数の返す数として現れない数とその性質やガウス平面上の相対的な素数の分布などを調べることが期待される。

[キーワード] ガウス整数, オイラーの $\Phi$ 関数, 互いに素

Gaussian integer, Euler's Phi function, Relatively Prime

### 1. はじめに

私たちは以前から $\Phi$ 関数の性質や美しさに興味を持っており、その性質について調べていた。その中でガウス整数において $\Phi$ 関数を考えるとどのようなものになるのか興味が湧き、本研究を始めることにした。

先行研究について調べてみると、ガウス整数の $\Phi$ 関数はすでに考えられていたが、先行研究や一般的に $\Phi$ 関数の拡張とされているものにおいては、ガウス整数の $\Phi$ 関数は互いに素なものの個数を表す関数ではないようであった。(Catrina A. May 2015)

そのため、有理整数の $\Phi$ 関数に準拠して、互いに素なものの個数を返す関数について調べることにした。

### 2. 関数の定義

0を除いたガウス整数 $z$ について、ガウス整数におけるP関数 $P(z)$ を、 $z$ と互いに素であり絶対値が0より大きく $|z|$ 以下であるガウス整数の個数と定義して、その関数を導出し、性質を調べることを目的とする。

ここで、 $z$ を0でないガウス整数とし、複素数平面において、原点を中心とした半径 $|z|$ の円が、内部または周上に含む0でないガウス整数の個数を $C(z)$ と定義する。

また、絶対値が $|z|$ 以下である0でないガウス整数のうち、 $z$ と互いに素であるものの個数を $P(z)$ と定義する。ここでは、素因数分解において同伴数を同一なものとみなした。

### 3. 定理と公式の導出

次に、私たちが本研究で発見し導出した定理や公式とその証明について記す。

#### 定理 1:

絶対値が $|z|$ 以下である0でないガウス整数 $p$ の倍数の個数は、絶対値が $\left|\frac{z}{p}\right|$ 以下である0でないガウス整数の個数に等しい。

証明:

絶対値が $|z|$ 以下である0でないガウス整数 $p$ の倍数は、少なくとも一方が0でない整数 $a, b$ を用いて $p(a+bi)$ と表せ $|p(a+bi)| \leq |z|$ を満たす。

条件式の両辺を $|p|$ で割ることで

$$|a+bi| \leq \left|\frac{z}{p}\right| \quad (1)$$

を得る。

これを満たす $(a, b)$ の組の個数は、絶対値が $\left|\frac{z}{p}\right|$ 以下である0でないガウス整数の個数に等しい。(証明終)

#### 公式:

任意のガウス整数 $z$ について、次の式が成り立つ。  
ただし、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ を異なるガウス素数、 $n, q_1, q_2, \dots, q_n$ を自然数とし、 $z = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_n^{q_n}$ とする。

$$P(z) = C(z) + \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^k C\left(\frac{z}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}\right) \right\} \quad (2)$$

証明:

絶対値が  $|z|$  以下で  $z$  と互いに素、すなわちどの  $z$  の約数の倍数でもないガウス整数の個数は、包除原理と定理 1 より

$$C(z) + \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^k C\left(\frac{z}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}\right) \right\} \quad (3)$$

と表され、これが  $P(z)$  と一致する。(証明終)

## 定理 2:

絶対値が  $|z|$  以下である  $0$  でないガウス整数の個数は、 $z$  の約数における  $P$  関数の値の総和に等しい。

証明:

数学的帰納法で示す

$|z|=1$  の場合は明らかに成り立つ。

$z = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_n^{q_n}$  として、絶対値が  $|z|$  未満の全てのガウス整数に対して成り立つと仮定する。

ただし、 $p_1, p_2, \dots, p_n$  を異なるガウス素数、 $n, q_1, q_2, \dots, q_n$  を自然数とする。

$P$  関数の公式から

$$\begin{aligned} P(z) &= C(z) - C\left(\frac{z}{p_1}\right) - \dots - C\left(\frac{z}{p_n}\right) \\ &\quad + C\left(\frac{z}{p_1 p_2}\right) + \dots + C\left(\frac{z}{p_{n-1} p_n}\right) - \dots \\ &\quad + (-1)^n C\left(\frac{z}{p_1 p_2 \dots p_n}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

すなわち

$$\begin{aligned} C(z) &= P(z) + C\left(\frac{z}{p_1}\right) + \dots + C\left(\frac{z}{p_n}\right) \\ &\quad - C\left(\frac{z}{p_1 p_2}\right) - \dots - C\left(\frac{z}{p_{n-1} p_n}\right) + \dots \\ &\quad - (-1)^n C\left(\frac{z}{p_1 p_2 \dots p_n}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

仮定より、(5) 式の右辺の二項目以降は、 $z$  でない  $z$  の約数における  $P$  関数のみの形として表すことができる。

ここで、 $Z = p_1^{Q_1} p_2^{Q_2} \dots p_n^{Q_n}$  ( $0 \leq Q_k \leq q_k, Q_k$  は自然数) とし、 $Q_k = q_k$  が成り立つような  $k$  がちょうど  $m$  個 ( $0 \leq m < n$ ) あった場合について、(5) 式の右辺における  $P(z)$  の係数を考える。また、 $K$  を、 $Q_k = q_k$  が成り立つ  $k$  の集合とする。

$1 \leq r \leq n-m$  について、 $C\left(\frac{z}{p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_r}}\right)$  を  $P$  関数で表した

ときの  $P(z)$  の係数は、

$k_1, k_2, \dots, k_r \notin K$  かつ  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$  を満たす場合  $-(-1)^r$ 、その他の場合  $0$  である。

したがって  $k_1, k_2, \dots, k_r \notin K$  かつ  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$  を満たす項は  $n-m$  個あり、 $1 \leq r \leq n-m$  であることに注意すると、(5) 式の右辺全体における  $P(z)$  の係数は

$$\sum_{r=1}^{n-m} -(-1)^r n-m C_r$$

であると求められ、この値は二項定理から  $1$  である。

また、 $P(z)$  の右辺における係数は  $1$  であるから、(5) 式の右辺を  $z$  の約数における  $P$  関数の和で表すと、すべての約数の  $P$  関数が現れ、その係数はすべて  $1$  であることが示された。

以上より、数学的帰納法から全てのガウス整数について題意が成り立つ。(証明終)

## 定理 3:

絶対値が  $0$  より大きく  $|z|$  以下である  $p$  の倍数の個数は、

$\frac{z}{p}$  の約数における  $\Phi$  関数の値の総和に等しい。

証明:

定理 1, 2 から明らかである。(証明終)

## 4. 結論

ガウス整数の倍数の個数を複素数平面上で可視化できないが試行錯誤して、定理 1 を発見した。また、包除原理を組み合わせることで  $C$  関数と  $P$  関数の間に成り立つ公式を導いた。さらに、この公式の性質について探っていく中で  $P$  関数と  $C$  関数に関するその他の定理を証明した。

そして、発見した定理の中には正の整数での  $\Phi$  関数において成り立つ定理と類似しているものが存在した。例えば、あるガウス整数の全ての約数についての  $P$  関数の和は、そのガウス整数の  $C$  関数に等しくなるが、これは、ある正の整数のすべての約数の  $\Phi$  関数の和が、その正の整数に等しくなるという性質に似通っている。このように、 $\Phi$  関数のある性質が、 $P$  関数にも働いている。そして、1 次元である  $\Phi$  関数に対して、 $P$  関数は  $\Phi$  関数の 2 次元への拡張であると考えられることを踏まえれば、 $\Phi$  関数の性質をより高次元に一般化できるだろうと考えられる。

他にも、ガウス整数と自然数の、約数や素因数分解などの相違点について考察し、 $P$  関数の返す数として現れない数とその性質や、ガウス平面上の相対的な素数の分布などについてさらに調べたい。

## 引用及び参考文献

Catrina A. May (2015) *Application of the Euler Phi Function in the Set of Gaussian integers*, Senior Honors Thesis.

岡田 恭二 複素数の素因数分解について  $-4n+1$  型の素数を  
めぐって—

([www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken\\_tsushin/30/30-8.pdf](http://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/30/30-8.pdf))